Definition und Berechnung von e.

Betrachte die rellen Folgen $\{a_n\}$ und $\{s_n\}$ mit

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \qquad \text{und} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Definiere $\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} s_n$. Warum ist dies wohldefiniert?

a) Zeige: $a_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{n^k}$ und $a_n \leq s_n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

b) Folgere: $\{a_n\}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \mathrm{e}$.

c) Zeige: Für alle $m > n$ gilt

$$a_m \geq 1 + 1 + (1 - \frac{1}{m})\frac{1}{2!} + \cdots + (1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m})\ldots(1 - \frac{n-1}{m})\frac{1}{n!}.$$

d) Folgere $\lim_{n\to\infty} a_n \geq s_n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \mathrm{e}$. Also $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$.

Diese Aufgabe zeigt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}$, die sogenannte Eulersche Zahl.

Versuche die Zahl e jeweils mit a_n und s_n zu approximieren. Wie groß muß jeweils $n \in \mathbb{N}$ sein, um e mit fünf Dezimalen genau zu berechnen?